Devoir machine : mikados

1 Génération de segments

On considère la suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{k+1} = 15091 \times u_k \bmod 64007.$$

Construire, dans le langage choisi, un tableau de taille 1024 contenant les termes u_0 à u_{1023} de la suite précédente.

1. Fournir les valeurs de **a)** u_{10} **b)** u_{100} **c)** u_{1000}.

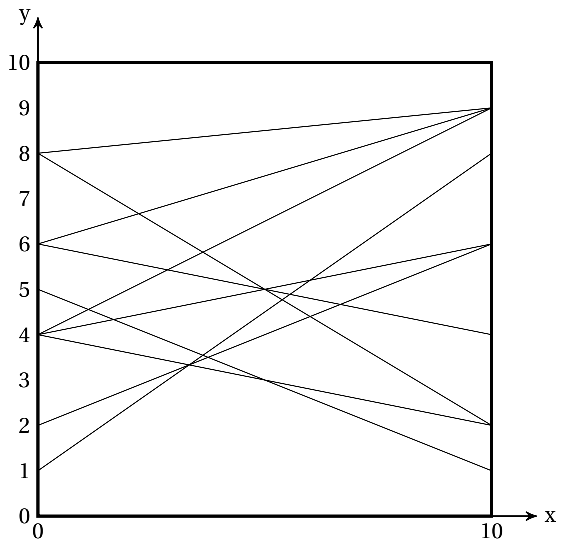
Un *mikado* désigne ici un carré et un ensemble de *segments* qui touchent les deux bords gauche et droit de ce carré. Les mikados sont paramétrés par un entier N. Cet enter désigne à lafois le nombre de segments et sa taille.

Ainsi, pou un N donné, le mikado correspondant sera un carré de taille $N\times N$ contenant N segments $(S_{N,i})_{0\leqslant i<N}$. Le coin en bas à gauche du carré est l'origine $(0,0)$. Le coin en haut à droite à pour coordonnées (N,N). Le segment $S_{N,i}$ relie le point d'ordonnée $g_{N,i}$ sur le côté gauche du carré au point d'ordonnée $d_{N,i}$ sur le côté droit. Les ordonnées $g_{N,i}$ et $d_{N,i}$ sont données par

$$g_{N,i} = \big(u_{10N+2i+0} \bmod (N-1)\big) + 1,$$

$$d_{N,i} = \big(u_{10N+2i+1} \bmod (N-1)\big) + 1.$$

Par exemple, pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$, on obtient le mikado ci-dessous :



Le sujet nécessitera, entre autres choses, de calculer les points d'intersection entre droites. Il est déconseillé d'effectuer ces calculs de façon approchée (par exemple en arithmétique flottante) ; cela risquerait de gêner la détection des cas où trois segments ou plus sont concourrants. On pourra *par exemple* représenter les coordonnées par des fractions rationnelles (paires d'entiers) dont le dénominateur est strictement positif. Ce n'est cependant pas la seule solution possible.

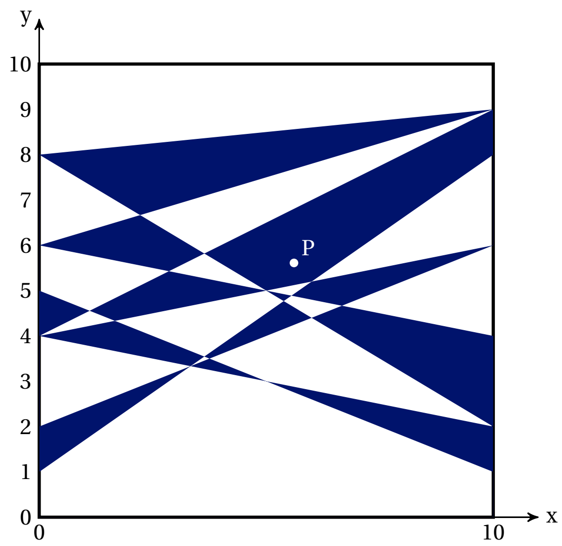
2. En notant x l'abscisse et y l'ordonnée, quelles sont les équations des segments suivants pour $N = 100$? On mettra le coefficient directeur sous forme d'une fraction irréductible. **a)** $S_{100,0}$ **b)** $S_{100,1}$ **c)** $S_{100,2}$.

La valeur de u_0 qui vous est fournie a été choisie de telle sorte que les N segments $(S_{N,i})_{0\leqslant i<N}$ soient différents, et cela pour chacune des valeurs de N qui apparaissent dans la suite du sujet. Le cas dégénéré où deux segments sont superposés pourra donc être ignoré sans risque dans les algorithmes.

2 Coloriage d'un mikado

Dans un mikado, les segments partitionnent le carré en polygones convexes, qu'on appellera *secteurs*. On choisit pour chaque secteur une couleur telle que deux secteurs ayant une arête en commun portent des couleurs différentes. Deux secteurs de même couleur peuvent par contre partager le même sommet.

On pourra se convaincre qu'il suffit de deux couleurs seulement pour colorier n'importe quel mikado. On notera les deux couleurs 1 et 2. On impose que le secteur dont un des côtés est le bord du carré d'ordonnée 0 porte la couleur 1. Cela impose la couleur des autres segments.



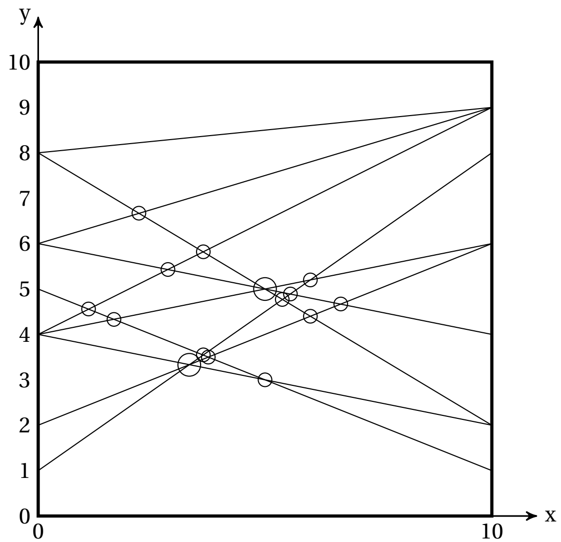
Le point P de coordonnées $(78N/139, 78N/139)$ est, pour les valeurs de N présente dans ce sujet, n'appartient à aucun des segments du mikado, et se trouve à l'intérieur d'un des secteurs. On souhaite déterminer la couleur du segment contenant ce point. Pour ce faire, on pourra notamment s'intéresser à la position du point par rapport à chacun des segments (est-il au-dessus ou en-dessous) et réfléchir à la manière d'utiliser cette information pour en déduire la couleur.

3. Quelle est la couleur du secteur contenant le point $(78N/139, 78N/139)$ pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

3 Nœuds d'un mikado

4. Combien de paires de segments $\left(S_{N,i}, S_{N,j}\right)$ (avec $0 \leqslant i < j < N$) ont une intersection à l'intérieur (strict) du carré $N \times N$ pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

L'intersection de deux segments ou plus à l'intérieur (strict) du carré définit un *nœud*. Trois segments ou plus peuvent se croiser en un même point à l'intérieur du carré, il y a donc moins de nœuds que de paires de segments qui se croisent dans le carré. Les intersections pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$ ont été représentées ci-dessous, par des cercles (cercles de plus grande taille lorsqu'ils correspondent à l'intersection de plus de deux segments).



Le point (x_1, y_1) est *plus petit* que le point (x_2, y_2) pour l'ordre lexicographique si leurs coordonnées vérifient

$$x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 < y_2).$$

5. Quelles sont les coordonnées (sous forme de fractions rationnelles irréductibles) du plus petit nœud pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

6. Combien y a-t-il de nœuds pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

7. Combien y a-t-il de secteurs pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

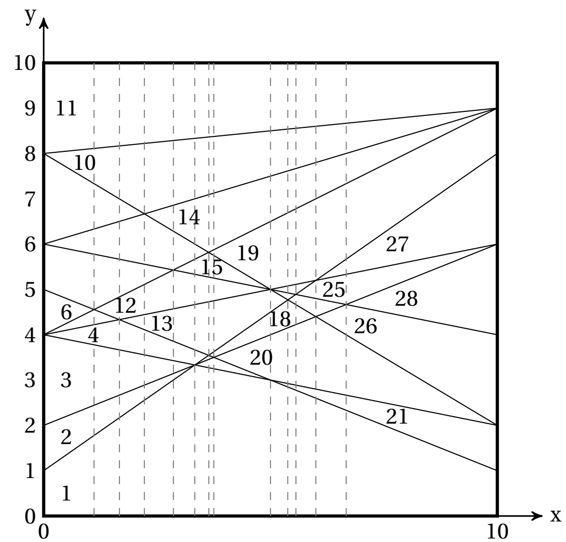
4 Tranches de mikado

Il est possible de découper le carré en plusieurs *tranches* verticales dont les bords passent par un ou plusieurs nœuds du mikado. Les tranches sont numérotées par abscisses croissantes (de gauche à droite), la première ayant le numéro 1. Le point $(78N/139, 78N/139)$ n'est, pour les valeurs de N considérées, sur aucune droite verticale séparant deux tranches, mais à l'intérieur strict de l'une d'elles. Ci-dessous, pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$, ont été tracées en pointillés les frontières des différents secteurs.

8. Quel est le numéro de la tranche contenant le point $(78N/139, 78N/139)$ pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

Les N segments du mikado partitionnent chaque tranche en $N+1$ *sous-secteurs* triangulaires ou trapézoïdaux. Ces sous-secteurs sont classés par tranche croissante, et dans chaque tranche par ordonnée croissante. Ainsi, le tout premier secteur est celui dont un des sommets est le point $(0, 0)$. Celui juste au-dessus est le deuxième, trandis que celui à sa droite ne sera visité qu'une fois que tous les secteurs de la première tranche auront été visités.

Les secteurs sont numérotés par rapport à l'ordre dans lequel l'un de leurs sous-scteurs est visité pour la première fois. Ainsi, si k secteurs ont déjà été numérotés et que le prochain sous-secteur appartient à un secteur qui ne porte pas encore de numéro, ce secteur prend le numéro $k+1$. Le tout premier secteur, celui qui a le point $(0, 0)$ comme sommet, porte le numéro 1. Ci-dessous, pour $u_0 = 1673$ et $N = 10$, ont été indiqués les numéros de quelques secteurs.



9. Quels sont les numéros des cinq premiers secteurs (par ordonnées croissantes) empilés dans la tranche contenant le point $(78N/139, 78N/139)$ pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?

Deux secteurs sont *voisins* s'ils sont de part et d'autre d'une même arête. Cela signifie aussi qu'ils ont deux nœuds en commun.

10. Combien y a-t-il de secteus possédant exactement 4 voisins pour **a)** N=10 ? **b)** N=20 ? **c)** N=50 ?