

Règles de déduction naturelle

1 Règles de base

Pour la logique minimale :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \text{ ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} \text{ aff}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ MP}$$

Pour la logique intuitionniste, on rajoute à la logique minimale :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \perp_e$$

Pour la logique classique, on rajoute (par exemple) à la logique intuitionniste :

$$\frac{}{\vdash \varphi \vee \neg \varphi} \text{ te}$$

2 Négation, conjonction, disjonction

On définit « $\neg \varphi$ » par « $\varphi \rightarrow \perp$ ». Introduction de l'implication et *modus ponens* donnent :

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} \neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e$$

Pour la conjonction et la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \wedge_e^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} \wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_i^g$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \vee_i^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \vee_e$$

3 Règles dérivées

Règle de coupure (minimale)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ cut}$$

Modus Barbara (minimale)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \rightarrow \sigma}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \sigma} \text{ MB}$$

Contraposition classique (minimale + négation)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi} \text{ cc}$$

Modus tollens (minimale + négation)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \neg \psi}{\Gamma \vdash \neg \varphi} \text{ MT}$$

Raisonnement par l'absurde intuitionniste (intuitionniste)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ abs}$$

Élimination de la double négation (classique)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \neg \neg_e$$

Raisonnement par l'absurde classique (classique)

$$\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ raa}$$

Élimination du tiers-exclu (classique)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma, \neg \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ tee}$$