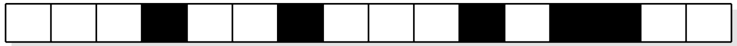
Problèmes de retour sur trace

1 Problèmes de sauts

On considère une « piste » contenant des trous, représentée par un tableau de longueur n, où `true` indique la présence d'un sol solide, et `false` la présence d'un trou. Par exemple, le tableau

```
[| true; true; true; false; true; true; false; true; true; true;
                                false; true; false; false; true; true |]
```

représente la piste suivante :



On part de la case 0, et on souhaite effectuer une série de mouvements, parmi deux possible :

- se déplacer d'une case vers la droite ;
- sauter de trois cases vers la droite.

On souhaite savoir s'il existe une séquence de mouvements permettant d'atteindre la case $n-1$, sans jamais être sur une case avec un trou. Lorsque l'on saute, naturellement, les deux cases entre la position de départ et d'arrivée peuvent, ou non, contenir des trous. On supposera que les cases 0 et $n-1$ ne contiennent jamais de trou.

Sur l'exemple du dessus, par exemple, c'est possible, par exemple en se déplaçant une première ois vers la droite, en sautant deux fois, puis en se déplaçant vers la droite, en sautant encore deux fois, et en se déplaçant une dernière fois vers la droite.

1. Proposer une fonction `possible` de signature `bool array -> bool` utilisant le retour sur trace pour répondre à la question.

2. Modifier le programme pour imposer, en plus, qu'il faut au moins deux déplacements vers la droite entre deux sauts.

2 Problème de Van der Waerden

La théorie de Ramsey est une branche des mathématiques combinatoires introduite par Frank Ramsey, cherchant à déterminer à partir de quelle taille un objet (liste, tableau, graphe...) vérifiera nécessairement une propriété [1]. On s'intéressera au cas particulier de la présence de structures périodiques dans un tableau `arr` contenant des entiers dans $[\![0\,..\,r-1]\!]$, un problème étudié par le mathématicien néerlandais Bartel Leendert van der Waerden. On souhaite plus précisément savoir s'il existe k éléments de ce tableau qui soient égaux et régulièrement espacés. Autrement dit, s'il existe des entiers `i` et `p` tels que

```
arr.(i) = arr.(i+p) = arr.(i+2*p) = ... = arr.(i+(k-1)*p)
```

Par exemple, pour le tableau ci-dessous, il existe un ensemble de $k=4$ éléments égaux régulièrement répartis, aux positions d'index 1, 4, 7 et 10 (soit $i=1$ et $p=3$)

1	2	1	0	2	1	0	2	0	2	2	1	0	1

En revanche, pour ce second tableau, il n'existe aucune séquence périodique de longueur $k=4$, quelle que soit la période p :

1	2	1	0	2	1	0	2	0	2	1	1	0	1

On souhaite utiliser la technique de retour sur trace pour savoir s'il est possible de construire un tableau de taille n contenant des entiers entre 0 et $r-1$, et ne contenant pas de séquence périodique de taille k, et si c'est le cas, de fournir un tel tableau.

3. On suppose dans un premier temps les i premières cases d'un tableau remplies avec des entiers entre 0 et $r-1$ de manière à ce qu'il n'y ait pas de structure périodique de taille k dans ces i premières cases. Proposer une fonction `interdit` de signature `int array -> int -> int -> int` prenant en argument le tableau, i, un entier k et un entier $c \in [\![0\,..\,r-1]\!]$ et déterminant si, lorsque l'on place c dans la case d'index i, il existe une structure périodique de taille k dans les $i+1$ premières cases.

4. En déduire une fonction `possibles` de signature `int array -> int -> int -> int` prenant en argument le tableau, i, k et r et renvoyant une liste (possiblement vide) des éléments que l'on peut placer dans la case i.

5. En utilisant le retour sur trace et la fonction précédente, proposer une fonction `solution` de signature `int -> int -> int -> int array option` prenant en argument n, k et r et retournant une option qui contient un tableau de taille n rempli avec des entiers entre 0 et $r-1$ sans structure périodique de taille k s'il en existe, et `None` sinon.

6. Déterminer la plus petite taille de tableau pour laquelle il n'existe aucune solution pour un k et un r donné (on se limitera aux cas $k+r \leqslant 6$, car les calculs deviennent très très très longs pour des valeurs plus grandes de k et r). On pourra vérifier que les valeurs sont correctes d'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_van_der_Waerden`
.

1. Le sujet est très riche, et nous n'en aborderons qu'une petite partie ici. On pourra lire une introduction sur le sujet par R. Mansuy dans le numéro 573 (juillet-août 2018) du magazine La Recherche.