

Logique

1 Logique minimale

1. Prouver les séquents suivants en logique minimale :

- $\vdash \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
- $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \sigma, \varphi \vdash \sigma$
- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \sigma$
- $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow \varphi \rightarrow \sigma$

2. Montrer que la règle suivante est dérivable en logique minimale :
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \sigma}$$

2 Conjonction

On rappelle que l'on peut introduire le connecteur logique \wedge grâce aux deux règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \quad \Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_e$$

1. Prouver en logique minimale $\varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \sigma$.

2. Prouver en logique minimale $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \sigma \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \sigma$.

3. Montrer que la règle suivante est dérivable en logique minimale :
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \sigma}$$

3 Un exemple concret

On propose le raisonnement suivant : « Si le train est en retard et qu'il n'y a pas de taxi à la gare, alors Jean est en retard. Le train est en retard. Jean arrive à l'heure. Par conséquent, il y avait des taxis à la gare. »

En définissant des variables propositionnelles bien choisies, traduire ce raisonnement en un séquent de déduction naturelle, et déterminer s'il est prouvable en logique intuitionniste.

4 Logique intuitionniste et classique

1. Montrer que $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ est prouvable en logique intuitionniste.

2. Montrer que $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ est prouvable en logique classique.

5 Lois de De Morgan

Déterminer quelle loi de De Morgan, parmi les quatre, n'est pas prouvable en logique intuitionniste, et montrer qu'elle est prouvable en logique classique.