Automates finis déterministes et langages reconnaissables

Ex. 1 – Existence

Proposer un langage qui ne puisse être reconnu par un automate fini déterministe avec un seul état acceptant.

Ex. 2 – Création d'automates

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$. Proposer des automates reconnaissant :

- le langage des mots contenant au moins un `a` ;
- le langage des mots contenant au plus un `a` ;
- le langage des mots contenant un nombre impair de `a` ;
- le langage des mots ayant `aba` comme préfixe ;
- le langage des mots ayant `aba` comme sous-mot ;
- le langage des mots ayant `aba` comme suffixe ;
- le langage des mots ayant `aba` comme facteur ;
- le langage des mots non vides dont le premier et le dernier symbole sont identiques ;
- le langage des mots non vides ayant au moins deux occurrences de leur dernier symbole.

Ex. 3 – Construction

Déterminer un automate fini déterministe reconnaissant l'interprétation de l'expression régulière `(ε|c)(a|bab)*`.

Ex. 4 – Divisibilité

On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Proposer un automate reconnaissant les écritures binaires canoniques (ne commençant pas par 0, excepté pour l'entier 0) des entiers divisibles par 5.

Ex. 5 – Longueur de mots reconnus

Soit A un automate à n états, et L le langage reconnu par cet automate. Montrer que si L est non vide, alors il contient au moins un mot de longueur strictement inférieure à n.

Ex. 6 – Congruences de symboles

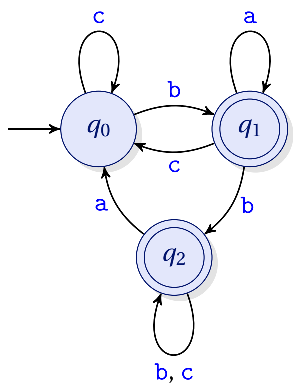
Soit Σ un alphabet de cardinal n.

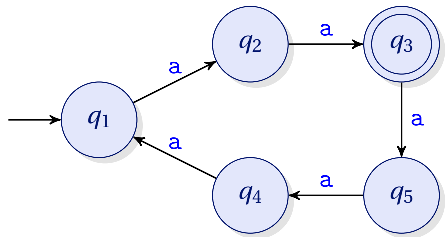
1. On considère un symbole $s \in \Sigma$ quelconque. Montrer que, pour tout $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, le langage $\mathrm{L}_{s,p,q} = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; |w|_s = p \mod q \right\}$ est un langage reconnaissable.

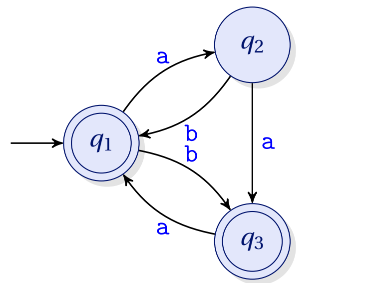
2. Qu'en est-il du langage L des mots w dans lesquels, pour tous symboles s et $s' \in \Sigma$, $|w|_s - |w|_{s'} \neq 0 \mod q$?

Ex. 7 – Expression rationelle

Déterminer une expression rationnelle dont l'intepétation est le langage reconnu par les automates ci-dessous :

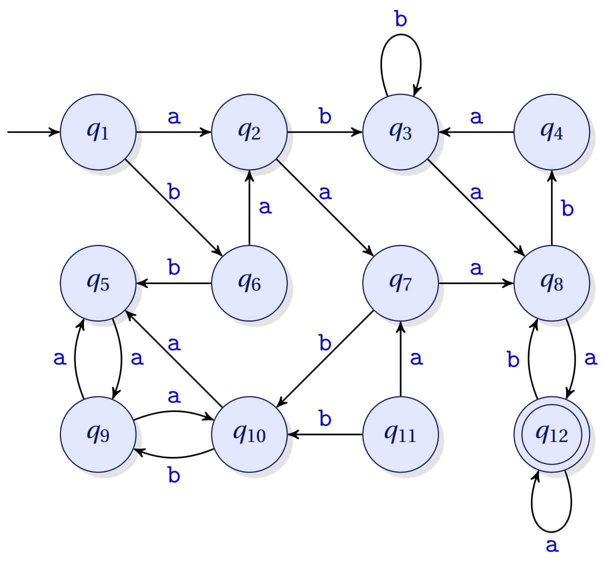






Ex. 8 – Émondage

Émonder l'automate suivant :



Ex. 9 – Mots doubles

Un mot sur un alphabet Σ est dit *double* si chacun des symboles qu'il contient apparaît au moins deux fois.

1. Montrer que tout mot de longueur $2^{|\Sigma|}$ contient au moins un facteur double.

2. Montrer que, pour tout Σ, il existe au moins un mot de longueur $2^{|\Sigma|-1}$ qui ne contienne pas de facteur double.

3. Le langage des mots doubles est-il un langage reconnaissable ?

Ex. 10 – Ajout / suppression d'un symbole

Soit L un langage reconnaissable sur l'alphabet Σ. Montrer que le langage L' des mots de L auquel on a rajouté un symbole, c'est-à-dire défini par

$$\mathrm{L}' = \{u \cdot s \cdot v \mid u \cdot v \in \mathrm{L} \quad \text{et} \quad s \in \Sigma\}$$

est un langage reconnaissable.

Montrer que le langage L" des mots de L privés d'un symbole, c'est-à-dire défini par

$$\mathrm{L}'' = \left\{u \cdot v \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists s \in \Sigma, u \cdot s \cdot v \in \mathrm{L}\right\}$$

est également un langage reconnaissable.

Ex. 11 – Langages non reconnaissables

Montrer que le langage $\mathrm{L} = \left\{\mathtt{a}^i \mathtt{b} \mathtt{a}^{i+j} \mathtt{b} \mathtt{a}^j \;\middle|\; i, j \in \mathbb{N}\right\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ n'est pas reconnaissable.

Qu'en est-il de $\mathrm{L}' = \left\{\mathtt{a}^i \mathtt{b} \mathtt{a}^{(i+j) \mod 2} \mathtt{b} \mathtt{a}^j \;\middle|\; i, j \in \mathbb{N}\right\}$?

Ex. 12 – Combinatoire

Soient L et M deux langages *non* rationnels.

1. Leur union peut-elle être un langage rationnel ?

2. Leur intersection ?

3. La différence $\mathrm{L} \setminus \mathrm{M}$?

Ex. 13 – Langages dérivés

Soit L un langage rationnel.

1. Montrer que le langage des préfixes de L est rationnel.

2. Montrer de même que le langage des suffixes de L est rationnel.

3. En déduire que le langage des facteurs de L est rationnel.

4. Qu'en est-il du langage des sous-mots de L ?

Ex. 14 – Mines 2014

On considère l'alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Soit f une application quelconque définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $\mathrm{L}(f)$ l'ensemble des mots u appartenant à Σ^* vérifiant l'égalité $|u|_a = f(|u|_b)$.

1. On considère la fonction f_1 définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f_1(n) = 2$. Dessiner un automate reconnaissant le langage $\mathrm{L}(f_1)$.

2. On considère la fonction f_2 définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f_2(n) = 1$ si n est pair et $f_2(n) = 0$ sinon. Décrire $\mathrm{L}(f_2)$ par une expression rationnelle de la forme $\alpha(\mathtt{bab}|\mathtt{a}|\mathtt{b})\beta$, où α et β sont des expressions rationnelles à déterminer. Justifier la réponse.

3. Dessiner un automate non nécessairement déterministe reconnaissant le langage décrit par l'expression rationnelle $\mathtt{bab}|\mathtt{a}|\mathtt{b}$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

4. En s'appuyant sur l'expression rationnelle obtenue à la question 2, compléter l'automate obtenu à la question précédente pour obtenir un automate non déterministe reconnaissant le langage $\mathrm{L}(f_2)$. Cet automate devra nécessairement posséder un seul état initial et un seul état final.

5. Déterminiser l'automate obtenu à la question précédente. On utilisera un algorithme vu en cours et on ne fera apparaître que les états accessibles depuis l'état initial.

6. Montrer que si f n'est pas majorée par une constante, alors $\mathrm{L}(f)$ n'est pas rationnel.

7. On considère le langage $\mathrm{L}_=$ sur Σ défini par $\mathrm{L}_= = \left\{ u \in \Sigma^* \quad \text{tels que} \quad |u|_a = |u|_b \right\}$. Le langage $\mathrm{L}_=$ est-il rationnel ?

8. On considère le langage $\mathrm{L}_\leqslant$ sur Σ défini par $\mathrm{L}_\leqslant = \left\{ u \in \Sigma^* \quad \text{tels que} \quad |u|_a \leqslant |u|_b \right\}$. Le langage $\mathrm{L}_\leqslant$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

9. On considère le langage $\mathrm{L}_>$ sur Σ défini par $\mathrm{L}_> = \left\{ u \in \Sigma^* \quad \text{tels que} \quad |u|_a \leqslant |u|_b \right\}$. Le langage $\mathrm{L}_>$ est-il rationnel ? On utilisera le résultat de la question précédente.

10. Montrer que la réciproque de la proposition énoncée dans la question 6 est fausse.